Problemi variazionali con dato al bordo

1. Soluzioni di problemi ellittici con dato al bordo

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Diciamo che $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega,$$

se

$$u - v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Di nuovo, per ogni funzione $u \in H^1(\Omega)$ definiamo il funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx.$$

Proposizione 1. *Siano Ω una aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Mostrare che $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \textit{su} \quad \partial\Omega,$$

se e solo se u è soluzione del problema variazionale

$$\min\Big\{J_f(u) \ : \ u \in H^1(\Omega),\ u - g \in H_0^1(\Omega)\Big\}.$$

Proposizione 2. *Siano Ω una aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^1(\Omega)$. Mostrare che esiste un'unica soluzione $u \in H^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \textit{su} \quad \partial\Omega.$$

Osservazione 3. *La soluzione u di*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \textit{su} \quad \partial\Omega$$

si può scrivere come

$$u = u_0 + h,$$

dove:

- *$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ è la soluzione del problema*

$$-\Delta u_0 = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

- *$h \in H^1(\Omega)$ è la soluzione di*

$$-\Delta h = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad h = g \quad \textit{su} \quad \partial\Omega.$$

Osservazione 4. *La soluzione u dipende solo del dato g al bordo, ovvero se g_1 e g_2 sono due funzioni tali che*

$$g_1 - g_2 \in H_0^1(\Omega),$$

allora le soluzioni u_1 e u_2 di

$$-\Delta u_1 = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u_1 = g_1 \quad \textit{su} \quad \partial\Omega,$$

$$-\Delta u_2 = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u_2 = g_2 \quad \textit{su} \quad \partial\Omega,$$

coincidono.

2. Funzioni armoniche in domini limitati

Lemma 5. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $g \in H^1(\Omega)$ una unzione non-negativa. Sia h la funzione armonica*
$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$
Allora, per ogni funzione $u \in H^1(\Omega)$, tale che $u - g \in H^1_0(\Omega)$, si ha
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla h|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla(u-h)|^2\,dx.$$

Proof. Per ogni coppia di vettori $X, Y \in \mathbb{R}^d$ si ha
$$|X|^2 - |Y|^2 = |X-Y|^2 + 2Y \cdot (X-Y).$$
Di conseguenza,
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla h|^2 = \int_\Omega |\nabla(u-h)|^2\,dx + 2\int_\Omega \nabla h \cdot \nabla(u-h)\,dx\,.$$
Ora, siccome $u - h \in H^1_0(\Omega)$ e $\Delta h = 0$ in Ω, abbiamo che
$$\int_\Omega \nabla h \cdot \nabla(u-h)\,dx = 0.$$
□

Lemma 6. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e siano u e v due funzioni non-negative in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $v \le u$, allora $v \in H^1_0(\Omega)$.*

Proof. Sia φ_n una successione di funzioni $C^\infty_c(\Omega)$ che converge a u forte in H^1. Siccome il supporto di φ_n è strettamente contenuto in Ω e contiene il supporto di $v \wedge \varphi_n$, abbiamo che $v \wedge \varphi_n \in H^1_0(\Omega)$. D'altra parte, abbiamo che $v \wedge \varphi_n$ converge forte L^2 e debole H^1 a $u \wedge v = v$. □

Proposizione 7 (Principio del massimo debole per funzioni armoniche)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $g \in H^1(\Omega)$ una funzione nonnegativa. Sia h la funzione armonica*
$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$
Allora, $h \ge 0$ in Ω.

Proof. Applicare il lemma precedente alla funzione $u = h_+$. Per la minimalita di h, si ottiene che
$$\int_\Omega |\nabla h_-|^2\,dx = 0.$$
D'altra parte $h_- \le (h-g)_- \in H^1_0(\Omega)$. Per il lemma precedente, abbiamo che $h_- \in H^1_0(\Omega)$. Quindi, $h_- \equiv 0$. □

Corollario 8 (Principio del confronto per funzioni armoniche)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $G \ge g \in H^1(\Omega)$ due funzioni date. Siano h e H le funzioni armoniche*
$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$
$$\Delta H = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad H = G \quad su \quad \partial\Omega.$$
Allora, $h \le H$ in Ω.

3. Un problema a frontiera libera

Esercizio 9. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $g \in H^1(\Omega)$ una funzione nonnegativa. Mostrare che esiste una soluzione del problema variazionale*
$$\min\Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + |\{u>0\} \cap \Omega| \;:\; u \in H^1(\Omega),\; u - g \in H^1_0(\Omega) \Big\}.$$
Mostrare che $u \ge 0$ in Ω.